UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade
Departamento de Economia

Rodrigo Otavio Curvello Wutke

Leilão de Centavos: o impacto do preço de referência e da aversão à perda

Brasília

2015

Rodrigo Otavio Curvello Wutke

Leilão de Centavos: o impacto do preço de referência e da aversão à perda

Monografia apresentada como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Ciências Econômicas na Universidade de Brasília

Universidade de Brasília – UnB

Faculdade de Administração, Contabilidade e Economia

Departamento de Economia

Orientador: Gil Riella

Brasília

2015

Rodrigo Otavio Curvello Wutke
Leilão de Centavos: o impacto do preço de referência e da aversão à perda/ Rodrigo Otavio Curvello Wutke. – Brasília, 2015-
41 p.; 30 cm.

Orientador: Gil Riella

Monografia – Universidade de Brasília – UnB
Faculdade de Administração, Contabilidade e Economia
Departamento de Economia, 2015.

1. Leilão de Centavos. 2. Microeconomia. I. Gil Riella. II. Universidade Brasília. III. Faculdade de Administração, Contabilidade e Economia. IV. Título

Rodrigo Otavio Curvello Wutke

Leilão de Centavos: o impacto do preço de referência e da aversão à perda

Monografia apresentada como requisito parcial para a obtenção do Título de Bacharel em Ciências Econômicas na Universidade de Brasília

Trabalho aprovado. Brasília, 8 de julho de 2015:

Gil Riella
Orientador

Milene Takasago
Convidado

Brasília
2015

À minha companheira, Rebeca Mello,
por sua paciência, compreensão e apoio em todos os momentos

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a meus pais, irmãs e namorada, que sempre contribuíram para minha formação ao me proporcionar um ambiente familiar harmonioso e sempre me dar todo o tipo de motivação que alguém possa precisar.

Àqueles que dedicaram incontáveis horas de estudo comigo em vésperas de prova, colegas de biblioteca e, especialmente, meus amigos Fernando Couto e Fernando Fellows, minha eterna gratidão.

Finalmente, agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Gil Riella por sua atenção e conselhos, essenciais para a elaboração desta monografia.

Resumo

Nesta monografia, realizamos uma análise primária do leilão de centavos, por meio do arcabouço microeconômico tradicional da literatura, e demonstramos a possibilidade de complementação do modelo, acrescentando a hipótese de aversão à perda na utilidade dos agentes. Inicialmente, fazemos uma revisão de literatura de teoria dos leilões, e, mais especificamente, do leilão de centavos. Em seguida, analisamos os artigos que compõem a base dessa pesquisa, e, por fim, demonstramos uma solução alternativa para a estratégia ótima dos agentes. Nossos resultados advêm de comparações entre a estratégia ótima padrão e os pressupostos de dependência de referência e aversão à perda.

Palavras-chave: microeconomia. leilões. leilão de centavos.

Abstract

In this monograph, we elaborate a primary analysis on the penny auction, under the mainstream microeconomic scope, and we show the possibility of complementation of the model, through the inclusion of the hypothesis of loss aversion to the agents' utilities. First, we review the existing literature in auction theory, and, specifically, the penny auction. After that we analyze the articles that build the basis of this research and, in the end, we develop an alternative solution to the optimal strategy of the bidders. Our results are product of comparisons between the standard optimal strategy and the assumptions of reference dependence and loss aversion.

Key-words: microeconomics. auctions. penny auctions.

Sumário

Introdução

A teoria dos leilões, como um ramo da microeconomia e matematicamente formalizada, foi uma contribuição de Vickrey (1961), em seu artigo seminal *Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders*. O ganhador do Nobel possibilitou nova linha de pesquisa, no que concerne à teoria dos jogos. Essa pesquisa foi alvo de estudos durante os últimos 50 anos e apresenta desenvolvimento atual, com a popularização de leilões *online* (ROTH; OCKENFELS, 2002; ODEGAARD; ANDERSON, 2014).

O surgimento da internet proporcionou, como em diversas áreas do conhecimento, oportunidade de evolução aos mecanismos de venda. A ascensão de *sites* especializados no varejo *online*, como o *eBay*, *Amazon* e o Mercado Livre, incentivou o desenvolvimento de novos formatos de venda (SUN; LI; HAYYA, 2010; ROTH; OCKENFELS, 2002). A característica de adiamento do horário de término do leilão, a cada lance, foi incorporada do tradicional leilão inglês, (VICKREY, 1961) por algumas modalidades de leilão, como o recente leilão de centavos.

O leilão de centavos despontou na primeira década do século XXI e sua existência é possibilitada apenas dentro da internet. Nesse tipo de leilão, cada agente compra antecipadamente um pacote com determinado número de lances que poderão despender em leilões diversos. Em dado leilão, cada lance gera, necessariamente, o incremento de um centavo ao preço de venda do produto. O leilão possui um horário demarcado para seu término, que é sujeito a acréscimos, enquanto houver lances; pode-se afirmar, portanto, que o leilão apenas termina quando não há mais consumidores dispostos a gastar um de seus lances para prosseguir. Qualquer agente pode dar um lance a qualquer momento, fato que dificulta a precisão da estimação do número de agentes participantes, por qualquer um deles. O problema dos licitantes está relacionado ao seu valor interno quanto ao bem leiloado, ao preço do pacote de lances e às expectativas em relação à disposição dos demais agentes a gastar lances adicionais.

Por ser uma modalidade recente, há, ainda, pouco estudo sobre a microeconomia que fundamenta o leilão de centavos. A análise de Odegaard e Anderson (2014) baseia-se no estudo de um caso particular do leilão em que todos pagam. Esse estudo é singular na área e ainda deixa em aberto muitas possibilidades de pesquisa, como uma análise mais aprofundada do sistema de compras de lances por *bundling*; a regra de encerramento do leilão, em que o tempo restante do leilão é estendido a cada lance; ou, ainda, a incorporação de fundamentos comportamentais e desvios de racionalidade, como a aversão à perda, foco de nosso estudo.

Neste trabalho, nosso objetivo principal é apresentar os impactos averiguados na estratégia ótima do leilão de centavos, descrita por Odegaard e Anderson (2014), ao se acrescentar a hipótese de que os licitantes são avessos à perda. O método utilizado, para essa expansão do modelo, é análogo ao empregado em Lange e Ratan (2010) e Ahmad (2015). Para que se faça a comparação de maneira apropriada, analisamos, detalhadamente, tanto o modelo original de Odegaard e Anderson (2014) quanto o de Ahmad (2015).

1 Teoria dos Leilões

1.1 Fundamentos e categorias

Os leilões figuram na teoria econômica há tempo considerável. Desde Vickrey (1961), o artigo seminal que teve como maior contribuição a formalização da teoria dos leilões, foram publicados incontáveis trabalhos analisando esse mecanismo de mercado pela ótica microeconômica . Vickrey (1961) e Varian (2012) definem leilão como um jogo de interações estratégicas, no qual existe um principal, o vendedor do bem, e um número qualquer de agentes, os licitantes. Na maioria dos casos, vendedor não pode ser interpretado como sinônimo de leiloeiro, este não necessariamente é dono do bem, apenas conduz o processo de declaração de lances e organiza o leilão de forma geral. Nesse jogo, cada um dos agentes possui um valor interno, em relação ao bem leiloado, que é a principal influência em sua estratégia. De forma geral, o agente que declarar mais alta disposição a pagar, pelo bem, será declarado vencedor, desde que esse valor seja superior ao preço de reserva, fixado pelo vendedor. A disposição a pagar declarada, pelos agentes, não necessariamente será igual ao seu valor interno pelo bem, visto que os agentes podem tentar adquirir o item a um preço inferior e, por consequência, auferir uma utilidade superior; entretanto , como veremos, os leilões considerados ótimos, de acordo com os critérios estabelecidos por Riley e Samuelson (1981), só permitem ao agente racional a declaração de seu valor interno.

O funcionamento dos leilões proporciona diversos questionamentos, o que possibilita variadas orientações de pesquisa, sejam no ramo tradicional da microeconomia, sejam em estudos empíricos com coleta de dados. A abordagem de Riley e Samuelson (1981) é a forma padrão de análise microeconômica dos leilões e é utilizada, ainda, na maioria dos trabalhos publicados e em livros acadêmicos, como Varian (2012). Além disso, Riley e Samuelson (1981) definiram as características fundamentais dos leilões que de fato interessam à ciência e que já vinham sendo estudados desde Vickrey (1961). Fundamentalmente, os leilões ótimos, (*optimal auctions*, de acordo com Riley e Samuelson (1981)), devem se adequar a quatro características: o vencedor do leilão deve ser aquele que deu o lance mais alto; quanto mais alto o valor interno do agente, mais altos serão seus lances; os agentes têm valores internos distribuídos uniformemente e são neutros ao risco; os valores internos dos agentes são independentes. Para os leilões que se adequam a essas condições, Riley e Samuelson (1981) e Myerson (1981) derivaram, independentemente, a conclusão mais importante da teoria dos leilões: a equivalência nas receitas esperadas. Como veremos , essa relação de equivalência será fundamental para determinar as utilidades esperadas dos agentes, e, por consequência, as suas estratégias ótimas.

A importância dos trabalhos de Riley e Samuelson (1981) e Myerson (1981) está, intimamente, ligada ao modo no qual a Ciência Econômica estuda os mecanismos de leilão. Entre os pontos mais analisados, está a utilidade esperada do vendedor, determinada pelo excedente entre o valor pelo qual o bem foi vendido e o valor interno a ele atribuído. Essa utilidade esperada é consequência da racionalidade dos agentes, frente às regras de funcionamento do mecanismo selecionado, e sujeitas à distribuição dos valores internos, escolhidos, em geral, por meio de uma distribuição uniforme.

Os trabalhos mais modernos em teoria dos leilões dedicam-se a expandir as possibilidades de pesquisa, com contribuições teóricas que não se limitam ao aprofundamento do conhecimento existente acerca das formas tradicionais de leilão, mas apresentam novos mecanismos com graus de complexidade e de diferenciação crescentes, como o trabalho de Odegaard e Anderson (2014); novas maneiras de se estudar velhos mecanismos, como o uso de testes computacionais em Sun, Li e Hayya (2010); a aplicação de novos conceitos desenvolvidos na economia, como a atualização Bayesiana em Pinker, Seidmann e Vakrat (2010); ou, ainda, o rompimento com pressupostos básicos da microeconomia, como o modelo de racionalidade limitada utilizado por Jiang et al. (2013).

A forma na qual o cenário acadêmico se desenvolve em torno da teoria dos leilões, evidencia o potencial teórico da área e o espaço existente para trabalhos empíricos, os quais, até o momento, são muito escassos. Os leilões são mecanismos usados de forma ampla, inclusive em licitações dos governos em áreas como energia e telecomunicações, e são uma das formas mais relevantes de comércio *online* ou o *e-commerce*. A infinidade de usos, em que se podem aplicar os leilões, não apenas abre a possibilidade de estudos microeconômicos baseados no mercado, o qual, muitas vezes, progride com mais rapidez que o meio acadêmico, mas também gera incentivos à formulação teórica de alternativas cada vez mais eficientes, por meio do desenho de mecanismos, em um processo evolucionário.

Ao longo dos anos, foram estudados diversos tipos de leilão, mas nem todos prevaleceram relevantes na literatura. Alguns leilões, como o Inglês e o Holandês, são canônicos, estudados desde o princípio da formalização microeconômica dos leilões, em Vickrey (1961). Varian (2012) apresenta uma revisão sobre as formas de leilão, que, em sua opinião, são de maior interesse para a ciência. Visto a janela temporal, bem mais extensa, analisada por Varian (2012), preferimos sua relação de leilões relevantes à de Riley e Samuelson (1981), ainda que as conclusões destes sejam respeitadas e assimiladas à análise.

A classificação dos tipos de leilão, feita por Varian (2012), considera duas características: a natureza do bem leiloado e as regras do leilão. Varian afirma que os economistas, em geral, distinguem a natureza do bem entre leilões de valor privado e leilões de valor comum. No primeiro tipo, cada um dos participantes tem seu valor interno quanto ao bem, e esse valor não necessariamente será igual ao de outros. No caso dos leilões de valor comum, a maioria dos agentes atribui o mesmo valor ao bem leiloado (embora possa haver divergências quanto à estimativa desse valor). Varian dá enfoque prioritariamente aos leilões de valor privado, aproximando-se da análise de Vickrey (1961) e Riley e Samuelson (1981).

O tradicional leilão inglês, forma mais comum na prática e, também, a mais estudada, é a primeira forma descrita por Varian (2012). Nesse tipo de leilão, os agentes declaram lances sucessivamente mais altos. Geralmente, a diferença entre os lances é dada por um incremento mínimo. O procedimento ocorre até que não exista pelo menos um agente disposto a superar o lance anterior, momento em que o bem é vendido ao agente que declarou o lance mais alto. Vickrey (1961) ressalta, para melhor embasar sua posterior proposta de mecanismo, que o lance vencedor é, em geral, muito próximo ao segundo mais alto valor interno.

A segunda forma de leilão mais estudada, ainda que incomum no mercado, o leilão holandês consiste no caso em que o leiloeiro anuncia, primeiramente, preços altos e vai reduzindo-os gradualmente, até que algum agente aceite pagar aquela quantia. Vickrey (1961) explica que esse tipo de leilão incentiva o agente a tentar adivinhar o valor interno dos demais participantes, de forma a obter o maior ganho esperado. Anunciar o lance no exato momento em que o leiloeiro inicia o processo maximiza a probabilidade de se obter o bem, mas garante um excedente de zero ao consumidor. Em contrapartida, ao deixar o preço abaixar, o excedente esperado aumenta progressivamente, mas a probabilidade de se ficar com o bem diminui proporcionalmente. Dessa forma, os agentes precisam tentar balancear esses aspectos, ao tomar por base suas crenças quanto aos lances dos demais participantes.

A categoria de leilões de lances fechados está entre as mais relevantes do ponto de vista teórico. Nessa categoria, cada agente escreve seu lance em um papel e deposita-o em um envelope fechado. Os envelopes são reunidos e abertos pelo leiloeiro, e o agente que tiver declarado o lance mais alto recebe o bem, mediante pagamento do montante anunciado no papel. Se o vendedor tiver definido um preço de reserva, e se todos os lances forem inferiores a esse preço, a transação não ocorrerá. Varian (2012) faz menção à variante do leilão de lance fechado, conhecida como leilão de Vickrey, justamente por ter sido formulada por William Vickrey, em seu artigo seminal, de 1961. Na variação, o bem também será designado ao agente que declarar o maior preço, mas este deverá pagar o valor referente ao segundo maior preço. Apesar de parecer um mecanismo pouco racional, do ponto de vista do vendedor, o leilão de Vickrey tem a propriedade de compatibilidade de incentivos em seu favor, visto que os agentes são incentivados a dar o lance igual ao seu valor interno, em qualquer ocasião. Sendo assim, Vickrey (1961) mostra a equivalência entre seu leilão e o leilão inglês, em uma análise primitiva do que seria a equivalência de receitas, anos depois.

Em anos recentes, a literatura tem voltado sua atenção a uma classe de leilões que não poderia ser analisada por Vickrey, Riley ou Samuelson, em suas épocas. Os leilões *online* foram um desdobramento natural da evolução dos mecanismos de venda, após a revolução informacional. Roth e Ockenfels (2002) percebem a emergência e a amplitude que os leilões *online* tomam e fazem uma análise empírica sobre a estratégia de *bid sniping*, observada nos maiores *sites* do ramo, (*eBay* e *Amazon*). Os autores concluem que existem evidências significativas que suportam a constatação, na qual a regra que define o momento de encerramento dos leilões afeta a estratégia de lances dos consumidores, e atribuem a isso à tendência de evitar guerras de preços entre os agentes. O trabalho de Roth e Ockenfels (2002) é uma das poucas análises empíricas para comportamento de agentes em leilões *online* e ainda é usado como referência para artigos teóricos da área.

Apesar de sua aplicação limitada, até meados dos anos 90, o leilão de Vickrey tornou-se muito popular com o surgimento dos leilões *online* (VARIAN, 2012). O mecanismo utilizado, nos grandes *sites*, como o *eBay*, em que existe um algoritmo denominado "participante substituto", caracteriza o leilão de Vickrey. Os usuários informam ao *site* seu valor interno pelo bem leiloado, e o "participante" aumenta, automaticamente, os lances do usuário, pelo incremento mínimo, sempre que necessário, até que seja alcançado o limite estabelecido. Como apenas o participante substituto conhece o valor do agente, fica caracterizada a propriedade de lance fechado, e, como o algoritmo faz lances sempre pelo incremento mínimo, o agente pagará um valor próximo ao segundo lance mais alto.

O leilão em que todos pagam é uma das modalidades de leilão pouco exploradas por Varian (2012), o qual se limita a descrever, brevemente, seu mecanismo; entretanto esse tipo de leilão tem papel destacado, nesta monografia, e requer comentário. No leilão em que todos pagam, todos os agentes que declaram algum lance devem pagá-lo, mas, como de costume, apenas o agente que declarou o lance mais alto adquire o bem. A análise microeconômica componente do estado-das-artes em leilão em que todos pagam, é a proposta em Krishna e Morgan (1997) e expandida em Bos (2012). Uma das conclusões mais importantes dos autores em ambos os artigos é que, independentemente da qualidade da informação que cada agente tem em relação ao número total de participantes do leilão, o leilão em que todos pagam de primeiro preço é inferior ao leilão em que todos pagam de segundo preço, o que mostra resultado análogo à análise do leilão de lance fechado, que resultou na formalização do leilão de Vickrey. A base teórica, proporcionada pela existência dos leilões em que todos pagam, confrontada com a propriedade evolucionária das necessidades dos mercados, cada vez mais informatizados e ambientados na internet, foi essencial para a emergência do leilão de centavos, principal objeto de análise deste estudo.

1.2 Leilão de Centavos

O leilão de centavos é uma das mais recentes categorias de regras de leilão, e é motivo de grandes questionamentos, sob diversas óticas, como quanto à legalidade de sua prática em alguns países, e quanto à sua possível caracterização como jogo de azar (ODEGAARD; ANDERSON, 2014).

O mecanismo do leilão de centavos difere das formas mais tradicionais de leilão. Existe um vendedor, que, nesse caso, será chamado de leiloeiro, para fins de diferenciação em relação aos vendedores de outras procedências (que possuem papel importante no modelo, explicado posteriormente). O vendedor disponibiliza para leilão um determinado bem, que não é único, pode ser comprado em outras lojas no varejo e, muitas vezes, é vendido pelo próprio leiloeiro. Para entrar no leilão, os agentes precisam ter adquirido alguma quantidade de lances. Os lances são vendidos pelo próprio leiloeiro, geralmente em pacotes com características de custo médio decrescente. Cada lance dado representa o acréscimo de um centavo ao preço final pelo qual o bem será vendido, o que implica na venda dos produtos por frações de seus preços usuais de revenda. Os agentes que não deram o último lance não recebem o bem, mas perdem seus lances. Em boa parte dos *sites* que atuam no ramo, há a possibilidade de se usar os lances perdidos como crédito na compra do mesmo bem do próprio leiloeiro. O leilão termina quando o tempo, pré-determinado de espera por um lance adicional, é esgotado.

Nos trabalhos de Platt, Price e Tappen (2013) e Augenblick (2015), encontramos as primeiras análises[1] do leilão de centavos, pela ótica microeconômica e pela abordagem empírica; ambos os artigos, entretanto , enfatizam o problema da receita esperada do leiloeiro e pouco desenvolvem a estratégia dos licitantes. Em contrapartida, os artigos avaliam o leilão de centavos como um mecanismo diferenciado e não suportam seus resultados na aproximação ao leilão em que todos pagam, apesar de Augenblick (2015) reconhecer que os leilões têm similaridades.

Ainda longe de ser plenamente analisado, o leilão de centavos tem como principal análise sistemática o trabalho de Odegaard e Anderson (2014). Os autores explicam a dinâmica dos leilões de centavos *online* como uma aplicação dos leilões em que todos pagam de segundo preço e usam a modelagem de Krishna e Morgan (1997) para determinar os pressupostos básicos, entretanto acrescentam canais alternativos de venda do produto leiloado. Dessa forma, caso o agente não possa adquirir o produto por meio do leilão, ele tem três possibilidades: não fazer nada; comprar o mesmo produto de uma loja varejista; utilizar seus lances despendidos como crédito na compra de um bem idêntico do leiloeiro. Além disso, os autores apresentam o equilíbrio simétrico de lances para leilões em que todos pagam de primeiro e segundo preço, e é dada aos agentes a opção de adquirir o bem

[1] Apesar de ser datado como 2015, o artigo de Augenblick está disponível *online* há alguns anos e foi citado por artigos em seus formatos anteriores.

antes e depois dos lances.

A pesquisa de Odegaard e Anderson (2014) deriva dois resultados importantes: primeiro, o equilíbrio simétrico do processo de declarar lances; segundo, a precificação ótima dos bens no canal alternativo. A conclusão a que os autores chegam, ao demonstrar esses pontos, é que a existência do canal alternativo de competição com o leilão proporciona uma expectativa de excedente para o consumidor, especialmente para aqueles que não poderiam adquirir o produto na ausência do leilão, ao custo de uma expectativa negativa para o leiloeiro, o que é suportado por dados empíricos, que apontam a falência de *sites* especializados em leilão de centavos (OSWALD, 2011 apud ODEGAARD; ANDERSON, 2014).

Existe um espaço a ser preenchido, no estado-das-artes, no que concerne ao leilão de centavos, apesar dos trabalhos mencionados, sejam em pesquisas empíricas e econométricas, seja no relaxamento das hipóteses que fundamentam as conclusões de Odegaard e Anderson (2014). Um dos pontos fundamentais que diferenciam o leilão de centavos dos outros é a característica de compra dos lances em pacotes, que não é analisada com a profundidade adequada por Odegaard e Anderson, o que ocasiona um espaço para a discussão da possibilidade de proposição de modelos mais completos e que não se limitem à aplicação do leilão em que todos pagam. Por simplificação, os autores supõem que os agentes sabem o custo marginal de cada lance dado, portanto conseguem calcular o número exato de lances que devem declarar para satisfazer a estratégia ótima. Isso torna o equilíbrio de Nash muito restrito, visto que não é assimilado no modelo o fato de que os custos marginais para cada agente não são necessariamente iguais, dada a estratégia de venda em pacotes de lances a custo médio decrescente. Além disso, não é analisada a alternativa estratégica de quando o agente deve entrar no leilão, consequentemente se supõe que todos iniciam seus lances juntos; entretanto, a existência dessas limitações ao modelo não tira a validade de suas conclusões e pode servir de motivação para pesquisas futuras sobre o tema.

O suporte teórico para desenvolvimentos, na modelagem de Odegaard e Anderson, existente no ramo de análise de jogos estratégicos repetidos, é quase ilimitado. A decisão dos agentes em continuar ou não dando lances é um exemplo prático dos jogos com opção de saída ou encerramento (*stopping games*), de forma similar ao modelo proposto por Casas-Arce (2010). A possibilidade de desistência do agente no modelo desenvolvido, em seu artigo, é pautada na ameaça existente no jogo de informação imperfeita, e é equiparável em descrição ao *Attrition War* de Milgrom e Weber (2015) e Krishna e Morgan (1997). No modelo, o principal beneficia-se ao promover a competição entre os agentes, pois isso possibilita punições críveis. A analogia dessa modelagem ao modelo do leilão de centavos é evidente e permite uma análise em potencial paralela à apresentada nesta monografia.

Odegaard e Anderson (2014) iniciaram os trabalhos de modelagem microeconômica ao leilão de centavos, mas ainda há muito potencial de pesquisa inexplorado. Sua caracterização do mecanismo como um leilão em que todos pagam, com canais alternativos de compra do bem leiloado, é uma simplificação útil à modelagem, mas ainda pode ser substituída por modelos mais verossímeis.

2 Odegaard e Anderson (2014)

O trabalho teórico desenvolvido por Odegaard e Anderson (2014) difere das demais contribuições, em relação ao leilão de centavos, no que concerne a suposições e conclusões. Como será demonstrado neste capítulo, o modelo proposto pelos autores é limitado por aproximações conceituais que objetivam a abordagem simplificada, no entanto mais concreta e reflexível. Os principais pressupostos do modelo são: (1) os *sites online* que hospedam os leilões de centavos oferecem os itens leiloados por um canal alternativo de varejo; (2) os licitantes seguem a estratégia proposta, ao dar lances; (3) os leilões de centavos podem ser modelados como leilões padrão, o que significa que o licitante que der o maior lance tem a vitória garantida no leilão (KRISHNA, 2002).

A terceira proposição dos autores requer maior elaboração, por ser mais técnica e de visualização mais complexa. Efetivamente, a maioria dos leilões de centavos disponíveis atualmente não é padrão, já que o vencedor é aquele que deu o último lance, portanto não necessariamente é aquele que mais empregou dinheiro em lances fixados. Para sobrepor esse impedimento, os autores argumentam que a maior parte dos lances só é dada próximo ao término do leilão, e, em geral, o vencedor acaba por ser o licitante que fixou mais lances. Além disso, a maioria dos *sites* de leilões de centavos possuem o serviço de *proxy bidding*, em que os usuários podem definir quanto estão dispostos a pagar em lances, e o *site* automaticamente dá os lances sempre que necessário, o que implica na vitória do mais dispendioso licitante. Apesar de não indicar que o agente que pagou mais no processo seja o vencedor do leilão, a evidência empírica de Byers, Mitzenmacher e Zervas (2010 apud ODEGAARD; ANDERSON, 2014) mostra que em 62% dos casos o vencedor do leilão foi, efetivamente, quem deu mais lances, e, em 80%, o vencedor estava entre os três principais licitantes.

Finalmente, o modelo proposto por Odegaard e Anderson merece destaque, quando trata o leilão de centavos como um típico leilão em que todos pagam, visto que os licitantes não pagam exatamente o mais alto lance que deram, mas arcam com o custo médio de cada lance fixado. Para evitar possíveis assimetrias nessa aproximação, os autores consideram que os licitantes conhecem o custo dos lances e que sua estratégia seria escolher o valor total que estariam dispostos a gastar com os lances daquele específico leilão. Esse valor é equivalente ao mais alto lance com que os participantes do leilão em que todos pagam devem arcar. Os autores explicam que o preço final do leilão de centavos, aquele que sofre incremento de um centavo a cada lance, tem uma ordem de magnitude menor que o custo dos lances perdidos, portanto pode ser desprezado.

2.1 O modelo

Consideremos que os licitantes têm acesso a dois canais de venda: um vendedor que oferta a um preço fixo de varejo e um leiloeiro que sedia um leilão em que todos pagam. No canal do preço fixo, os licitantes podem comprar o item por p_1. Para o canal do leilão, são consideradas duas versões: leilão de primeiro preço e de segundo preço. Na versão do leilão de primeiro preço, licitantes dão um lance b (*bid*, lance) e, se seu lance for o mais alto, vencem o leilão e pagam b, mas, caso o seu lance não seja o mais alto, eles ainda assim pagam b. Na versão de segundo preço, o lance que os licitantes anunciam é perdido, caso não seja o mais alto; entretanto caso b seja o maior lance, eles ganham o leilão ao preço do segundo maior lance. Independentemente da versão do leilão, licitantes que perdem podem escolher: (1) aceitar a perda de b e não fazer nada, (2) voltar à loja e comprar o item ao preço p_1 ou (3) utilizar b como crédito para a compra do item ao preço p_2 do leiloeiro.

Licitantes possuem um valor interno v e sabem que existem $N \geqslant 1$ outros licitantes com valores internos retirados de forma independente e identicamente distribuída (i.i.d.) da função distribuição acumulada $F_V(v) = Pr\{V \leqslant v\}$, limitada em $[\underline{v}, \bar{v}]$. Para o prosseguimento da caracterização do modelo, os autores definem ρ_v como a probabilidade de um licitante com valor interno v ter o mais alto valor interno, e, consequentemente, de vencer o leilão. Dessa forma, $\rho_v = Pr\{V_{(1)} < v\} = (F_v(v))^N$ em que $V_{(1)}$ é o valor interno mais alto dentre os N demais licitantes.

2.2 Estratégia do licitante no leilão em que todos pagam de primeiro preço

Primeiramente, analisaremos a estratégia do licitante, quando encara a versão do leilão em que todos pagam de primeiro preço e possui a opção de comprar o item do vendedor por p_1, caso perca o leilão. Um licitante com valor interno $v > p_1$ sempre aceitará comprar o item no canal alternativo, pois essa aquisição representa uma melhoria estrita (com $b < p_1$, $v - b - p_1 > -b$). Nesse caso, Odegaard e Anderson (2014) propõem que o licitante dê uma fração de p_1 como lance. Essa fração representa a probabilidade do seu valor interno ser o mais alto, ponderada pelo excedente esperado do comprador com $v = p_1$. Para licitantes com $v \leqslant p_1$, nunca será ótimo comprar o item a p_1. Dessa forma, esse tipo de licitante enfrenta um problema tradicional de teoria dos leilões, portanto deve dar lances coerentes. Os autores formalizam essas conclusões no seguinte lema:

Lema 2.1. *Suponha que existam $N + 1$ licitantes e dois canais de vendas: (1) varejo com preço fixo p_1 e (2) um leilão em que todos pagam de primeiro preço. Caso um licitante com valor interno v aja de acordo com:*

1. *se $v \leqslant p_1$, dar o lance $b = \rho_v E[V_{(1)} \mid V_{(1)} < v]$, e, se perder, não fazer nada;*

2. *se $v > p_1$, dar o lance $b = \rho_v p_1 - \phi_{p_1}$, e, se perder, comprar o item por p_1,*

em que ϕ_{p_1} é o excedente esperado para o licitante com valor interno $v = p_1$ (isto é, $\phi_{p_1} = \rho_{p_1}(p_1 - E[V_{(1)} \mid V_{(1)} < p_1])$), então a estratégia resulta em um Equilíbrio de Nash.

Dada a estratégia acima, o excedente esperado para o licitante com valor $v > p_1$ é

$$\begin{aligned}\phi_v &= \rho_v(v - \rho_v p_1 + \phi_{p_1}) + (1 - \rho_v)(v - p_1 - \rho_v p_1 + \phi_{p_1}) \\ &= v - p_1 + \phi_{p_1}.\end{aligned}$$

Para um licitante com valor $v \leqslant p_1$, o excedente esperado é

$$\begin{aligned}\phi_v &= \rho_v(v - \rho_v E[V_{(1)} \mid V_{(1)} < v]) - (1 - \rho_v)(\rho_v E[V_{(1)} \mid V_{(1)} < v]) \\ &= \rho_v(v - E[V_{(1)} \mid V_{(1)} < v]).\end{aligned}$$

Para todos os tipos de licitante, o excedente esperado é maior com a existência do leilão em que todos pagam do que seria caso houvesse apenas a opção do varejo a preço fixo. Os licitantes com baixo valor interno obtêm excedente por ter a chance de comprar um item pelo qual não estariam dispostos a pagar o preço de varejo, enquanto os demais licitantes recebem excedente extra ϕ_{p_1}. Esses licitantes, com valores mais altos, não têm incentivo a dar lances da mesma forma que aqueles com $v < p_1$ dão, o que garante que não haja desvio da estratégia de equilíbrio.

Suponhamos, agora, que os licitantes que não vencem o leilão tenham a possibilidade de utilizar seu lance perdido, b, como crédito na compra do item por p_2 do próprio leiloeiro. De forma racional, o leiloeiro só tem incentivo a fornecer o item para compra com crédito para $p_2 > p_1$. Sabemos que nenhum licitante, independentemente de seu v, daria um lance superior a p_1, pois por esse preço ele poderia adquirir o item com probabilidade 1, diretamente do varejo. Compradores com $v > p_1$ nunca aceitariam abdicar de seus lances perdidos, já que podem adquirir o item ou por p_1 ou por p_2. Por fim, embora compradores com $v < p_1$ nunca comprariam o item por p_1, eles talvez tenham incentivo a comprar por p_2, caso seu lance b seja superior a $p_2 - v$, pois, dessa forma, a desutilidade de se obter o item por um valor acima do que ele estaria disposto é inferior à desutilidade de perder b. Em contrapartida, em equilíbrio, essa situação nunca ocorreria, pois o leiloeiro não tem incentivo para fornecer o item a um preço p_2 tal que $p_2 - b < p_1$, já que, por hipótese, ele obtém o item do vendedor de varejo por p_1. Assim sendo, Odegaard e Anderson (2014) definem que o leiloeiro determina o preço por $p_2 \leqslant p_1 + b_{p_1} = p_1 + \rho_{p_1} E[V_{(1)} \mid V_{(1)} < p_1]$, em que b_{p_1} é o lance dado por um licitante com valor $v = p_1$ e age de acordo com o Lema 2.1. Dada essa proposição, existe um ponto de transição $v^+ = F^{-1}((p_2 - p_1 + \rho_{p_1})/p_1^{1/N})$, tal que, se $v \leqslant v^+$, então o comprador age de acordo com o Lema 2.1; caso $v > v^+$, o comprador deve antes dar o lance $b = (p_1 - (1 - \rho_v)p_2 - \phi_{p_1})/\rho_v$ e, caso perca o leilão, comprar o lance por p_2. Os autores descrevem esse comportamento no lema que segue:

Lema 2.2. *Suponha que existam $N + 1$ licitantes e dois canais de vendas: (1) varejo com preço fixo p_1 e (2) um leilão em que todos pagam de primeiro preço no qual os licitantes perdedores podem usar seu lance como crédito na compra do item por p_2 (e $p_2 \geqslant p_1 + \rho_{p_1} E[V_{(1)} \mid V_{(1)} < p_1]$). Caso um licitante com valor interno v aja de acordo com:*

1. *se $v \leqslant v^+$, agir de acordo com o Lema 2.1;*
2. *se $v > v^+$, dar o lance $b = (p_1 - (1 - \rho_v)p_2 - \phi_{p_1})/\rho_v$, e, caso perca, comprar o item por p_2,*

em que $v^+ \equiv max\{p_1, F^{-1}(min\{1, (p_2 - p_1 + \phi_{p_1})/p_1^{1/N}\})\}$, então a estratégia resulta em um equilíbrio de Nash.

Com a possibilidade de uso do lance como crédito na compra do item, o excedente esperado para os licitantes com valor $v > v^+$ é $\phi_v = \rho_v(v - (p_1 - (1 - \rho_v)p_2 - \phi_{p_1})/\rho_v) + (1 - \rho_v)(v - p_2) = v - p_1 + \rho_{p_1}$, enquanto, para os licitantes com $v \leqslant v^+$, o excedente esperado é o mesmo de antes. Apesar de o acréscimo da opção de compra por p_2 ter segmentado os licitantes com $v > p_1$ em dois grupos diferentes de estratégias, o excedente esperado não é modificado, respeitando o princípio de equivalência de receitas. Além disso, embora a expressão para v^+ pareça complicada, ela simplesmente representa o valor v para o qual $p_1 + b_v = p_2$, ou seja, o ponto no qual o licitante é indiferente entre: (1) abdicar do lance b_v e comprar o item por p_1 e (2) usar o lance b_v como crédito para comprar o item do leiloeiro por p_2. Podemos observar que, dependendo dos valores de p_1 e p_2, o ponto de transição, que segmenta os compradores de alto valor interno, pode ou não existir. Quando p_2 é muito alto, v^+ tende a $\bar{v}$, de forma que passa a existir apenas um tipo de comprador com alto valor interno. Para garantir que exista a segmentação, Odegaard e Anderson (2014) formulam um corolário que limita p_2.

Corolário 2.1. *No contexto do leilão em que todos pagam de primeiro preço, se $p_2 \geqslant 2p_1$, ninguém comprará o item por p_2.*

Dessa forma, se p_2 tiver pelo menos duas vezes a grandeza de p_1, então ninguém comprará o item a p_2, de modo que não há incentivo para oferecer tal preço. Apesar disso, a limitação proposta no Corolário 2.1 não é o mínimo necessário para os resultados do modelo se manterem. Como os compradores com $v > p_1$ têm um acréscimo de ϕ_{p_1}, no excedente, o limite mínimo para se garantir os resultados do modelo é $p_2 \geqslant 2p_1 - \phi_{p_1}$.

2.3 Estratégia do licitante no leilão em que todos pagam de segundo preço

Agora vamos considerar a versão de segundo preço do leilão em que todos pagam. Assim como na versão de primeiro preço, nossa análise se inicia com o cenário em que os licitantes que perdem o leilão podem apenas comprar o item ao preço p_1 de varejo, ou não fazer nada. Como antes, licitantes com valor interno $v > p_1$ nunca aceitarão abdicar de seu lance se perderem o leilão, então os resultados da teoria dos leilões não se aplicam. Além disso, como o formato do leilão é diferente do que foi analisado anteriormente, os resultados do Lema 2.1 não são válidos. Em contrapartida, para licitantes com $v \leqslant p_1$, nunca será ótimo comprar o item por p_1, o que faz com que eles se deparem com um modelo tradicional de teoria dos leilões. Os autores formalizam a estratégia dos licitantes no lema que segue:

Lema 2.3. *Suponha que existam $N+1$ licitantes e dois canais de vendas: (1) varejo com preço fixo p_1 e (2) um leilão em que todos pagam de segundo preço. Caso um licitante com valor interno v aja de acordo com:*

1. *se $v \leqslant p_1$, dar o lance $b_v = \int_0^v x\lambda_{V_{(1)}}(x)dx$ e, se perder, não fazer nada;*
2. *se $v > p_1$, dar o lance $b_v = b_{p_1} + \int_{p_1}^v p_1\lambda_{V_{(1)}}(x)dx$, e, se perder, comprar a p_1,*

em que $\lambda_{V_{(1)}}(x)$ é a função taxa de risco de $V_{(1)}$, então a estratégia resulta em um equilíbrio de Nash.

A função taxa de risco é introduzida, aqui, de forma idêntica à representada em Krishna (2002) e é definida por

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}.$$

Segundo Odegaard e Anderson (2014), o Lema 2.3 é parcialmente baseado nas estratégias de equilíbrio do leilão de primeiro preço e na aplicação do teorema da equivalência de receitas. Da mesma forma, o excedente esperado do licitante com $v \leqslant p_1$ permanece sendo $\phi_v = \rho_v(v - E[V_{(1)} \mid V_{(1)} < v])$, enquanto, para um licitante com $v > p_1$, o excedente esperado é dado por $\phi_v = v - p_1 + \phi_{p_1}$.

Com o acréscimo da opção de uso do lance perdido, b, como crédito para a compra do item a p_2, supomos que o leiloeiro fixa $p_2 \geqslant p_1 + b_{p_1} = p_1 + \int_0^{p_1} x\lambda_{V_{(1)}}(x)dx$, em que b_{p_1} é o lance anunciado por um licitante com $v = p_1$, definida de acordo com o Lema 2.3. Dada essa suposição, existe um ponto de transição v^- tal que, se $v \leqslant v^-$, o licitante age como no Lema 2.3, enquanto se $v > v^-$, o licitante deve simplesmente fixar $b = p_2$. Essas conclusões são formalizadas no lema que segue:

Lema 2.4. *Suponha que existam $N+1$ licitantes e dois canais de vendas: (1) varejo com preço fixo p_1 e (2) um leilão em que todos pagam de segundo preço no qual os licitantes perdedores podem usar seu lance como crédito na compra do item por p_2 (e $p_2 \geqslant p_1 + \int_0^{p_1} x\lambda_{V_{(1)}}(x)dx$). Caso um licitante com valor interno v aja de acordo com:*

1. *se $v \leqslant v^-$, agir de acordo com o Lema 2.3;*

2. *se $v > v^-$, dar o lance $b = p_2$, e, se perder, comprar o item por p_2,*

em que $v^- \equiv F^{-1}(1 - \exp{(p_1 + b_{p_1} - p_2)/p_1} + \ln{(1-(F(p_1))^N)}^{1/N}$, então a estratégia resulta em um equilíbrio de Nash.

Assim como no âmbito de primeiro preço, a existência de p_2 e do ponto de transição v^- não altera o excedente esperado dos licitantes com $v > v^-$, que se mantém $\phi_v = v - p_1 + \phi_{p_1}$. Apesar de que a expressão de v^- possa parecer complicada, ela representa simplesmente o ponto de indiferença entre aceitar o lance perdido comprando o item por p_1 e usar o lance perdido como crédito na compra do item por p_2. De forma similar ao leilão de primeiro preço, v^- é crescente em relação a p_2 e, se não houver limite superior a p_2, v^- converge para $\bar{v}$. Dessa forma, o leiloeiro poderia fixar p_2 arbitrariamente alto, inclusive acima de $\bar{v}$, e, ainda, existiriam licitantes dispostos a dar o lance p_2. De modo contrário, se p_2 é muito baixo, nenhum licitante racional compra o item por p_1, no varejo. As conclusões desse raciocínio são apresentadas pelos autores por meio do corolário:

Corolário 2.2. *No contexto do leilão em que todos pagam de segundo preço, se $p_2 = p_1 + b_{p_1}$, ninguém comprará o item da loja pelo preço fixo de varejo p_1.*

A teoria dos leilões geralmente busca contemplar a questão da eficiência, quando esta se trata da perspectiva dos licitantes (ou da sociedade), o que requer que o item leiloado seja adquirido pelo indivíduo com maior valor interno. No modelo apresentado por Odegaard e Anderson (2014), todos os licitantes com valor $v > p_1$ são garantidos a obter o item, seja por meio do leilão seja por algum dos meios de compra alternativos, de forma que o leilão não aufere nenhum ganho de eficiência a esses compradores; para os licitantes com $v < p_1$, entretanto, existe um ganho de eficiência às custas de perda para o leiloeiro.

2.4 Problema de precificação do leiloeiro e do vendedor

A partir das estratégias anteriormente detalhadas, consideramos o problema do leiloeiro e do vendedor de fixar preços ótimos, p_1 e p_2, os quais maximizam sua receita esperada.

Analisemos, primeiramente, o caso em que a mesma firma que hospeda o leilão e vende o item por p_2 é também responsável pela oferta de varejo ao preço p_1. Nesse contexto, a receita esperada originada por licitantes que não venceram o leilão é o lance fixado, que pode ser b_v, $b_v + p_1$, ou p_2, dependendo do valor interno do licitante. Gerada pelo agente vencedor do leilão, a receita é ou o lance b_v, no caso do leilão de primeiro preço, ou o segundo maior lance, se o leilão for de segundo preço. Desse modo, temos que, no leilão de primeiro preço, a receita esperada por licitante é:

$$\pi_{pp} = \int_{\underline{v}}^{p_1} b_v f(v)dv + \int_{p_1}^{v^+} [b_v + (1-\rho_v p_1)] f(v)dv + \int_{v^+}^{\bar{v}} [\rho_v b_v + (1-\rho_v)p_2] f(v)dv$$

Com b_v e v^+ definidos de acordo com os Lemas 2.1 e 2.2, temos que

$$\begin{aligned}\pi_{pp} = \int_{\underline{v}}^{p_1} \rho_v E[V_{(1)} \mid V_{(1)} < v] f(v)dv + \int_{p_1}^{v^+} [\rho_v p_1 - \phi_{p_1} + (1-\rho_v p_1)] f(v)dv \\ + \int_{v^+}^{\bar{v}} [\rho_v (p_1 - (1-\rho_v)p_2 - \phi_{p_1})/\rho_v + (1-\rho_v)p_2] f(v)dv\end{aligned}$$

o que, quando simplificamos e aplicamos a teoria da equivalência de receitas, nos leva à seguinte proposição:

Proposição 2.1. *Se houver apenas uma firma operando tanto o canal de preço fixo de varejo quanto o canal do leilão em que todos pagam, tanto de primeiro quanto de segundo preço, então a receita esperada por licitante é independente de p_2 e dada por:*

$$\pi_{pp} = \int_{\underline{v}}^{p_1} \rho_v E[V_{(1)} \mid V_{(1)} < v] f(v)dv + (p_1(1-\rho_{p_1}) + \rho_{p_1} E[V_{(1)} \mid V_{(1)} < v])(1 - F_V(p_1))$$

em que $\rho_v = (F_V(v))^N$.

Consideremos, agora, o contexto em que existem duas firmas: um vendedor operando o varejo de preço fixo p_1 e um leiloeiro hospedando o leilão em que todos pagam. Por simplicidade, assumimos que o leiloeiro adquire os itens por p_1 do varejo. Tanto o vencedor do leilão como os perdedores com valor interno superior ao ponto de transição, respectivo ao leilão em que está inserido, v^+ (primeiro preço) e v^- (segundo preço), recebem o item pelo canal do leilão. Dessa forma, a receita esperada por licitante do vendedor será:

$$\pi_r = p_1(1 - F_V(p_1)) + \int_{\underline{v}}^{p_1} \rho_v p_1 f(v)dv.$$

O primeiro termo da função representa a receita esperada para um vendedor operando num cenário em que não há o leilão, visto que o leiloeiro compra os itens diretamente do vendedor por p_1. O segundo termo representa a possibilidade de um licitante com $v < p_1$ vencer o leilão e, consequentemente, adquirir o item, o que não aconteceria em um contexto em que não existe o leilão. Assim como no caso em que apenas uma firma controlava ambos os canais de vendas, chegamos à seguinte proposição sobre a receita líquida por licitante, para o leiloeiro:

Proposição 2.2. *Se existem $N+1$ licitantes que agem de acordo com os Lemas 2.1 e 2.2 em um leilão em que todos pagam de primeiro preço, ou com os Lemas 2.3 e 2.4 em um leilão em que todos pagam de segundo preço, e o leiloeiro compra os itens do vendedor por p_1, então a receita líquida esperada do leiloeiro por licitante é sempre negativa e dada por*

$$\pi_{tp} = \int_{\underline{v}}^{p_1} \rho_v(E[V_{(1)} \mid V_{(1)} < v] - p_1)f(v)dv - \phi_{p_1}(1 - F_V(p_1)).$$

Com o objetivo de aprofundar sua análise, Odegaard e Anderson (2014) aplicam a simplificação de que os licitantes têm valores internos uniformemente distribuídos em $[0,1]$, portanto $F_V(v) = v$, em que $v \in [0,1]$. Dessa forma, quando há apenas uma firma controlando os dois canais de venda, a equação da receita esperada por licitante torna-se

$$\pi = p_1(1-p_1) + p_1^{N+2}\frac{2}{N+2} - p_1^{N+1}\frac{1}{N+1}$$

O primeiro termo da equação é a receita esperada por uma firma que opera apenas o canal de preço fixo, enquanto os dois termos restantes representam o resultado líquido de uma firma que opera o canal do leilão em que todos pagam.

Do problema de maximização da receita, deriva-se a equação e iguala-a a zero, procedimento realizado por Odegaard e Anderson (2014) que provou que, para qualquer $N \geqslant 1$, o preço ótimo para o varejo é $p_1^* = \frac{1}{2}$, seja no leilão de primeiro ou no de segundo preço. Existe, além disso, uma restrição para p_1 para garantir que a operação do canal do leilão seja lucrativa. Resolvendo a inequação para que os termos do leilão sejam, no mínimo, iguais a zero, chega-se à restrição

$$p_1 \geqslant \frac{N+2}{2(N+1)}.$$

A adesão, pela firma, ao leilão em que todos pagam, na presença de preços ótimos, reduz sua receita esperada a princípio, mas essa perda diminui com o aumento no número de licitantes e, inclusive, torna-se um ganho, caso a firma determine preços mais altos de acordo com a restrição acima. Notemos, também, que a restrição converge assintoticamente a 0,5 quando N tende ao infinito. Apesar disso, caso a firma não tenha opção quanto a fazer ou não o leilão, o racional a ser feito seria fixar o preço no ótimo, ainda que o resultado seja inferior àquele esperado na ausência do leilão.

3 Ahmad (2015)

A variedade de desvios de racionalidade que se podem verificar nos leilões é abrangente, o que possibilita a pesquisa microeconômica de diferentes formas. Recebem notoriedade, nesse âmbito, duas variantes de limitação na racionalidade dos agentes: o recorrente comportamento de pagar excessivamente por determinado bem, *overbidding*, seja em relação a um preço de referência, seja em relação ao próprio valor que o licitante atribui *ex ante* ao bem, e a aversão à perda, caracterizada pelo maior peso atribuído à desutilidade da perda, se comparada à utilidade do ganho.

O primeiro caso é conhecido na literatura como *winner's curse*, ou a maldição do vencedor, e foi empiricamente verificado, em diversos casos de leilões *online*: mais de 8% dos vencedores haviam despendido um valor superior ao preço de mercado, usado como referência, de um produto idêntico ao adquirido (AMYX; LUEHLFING, 2006). No contexto da aplicação de desvios de racionalidade, em microeconomia, a forma como se enquadra o problema é relevante, e, nesse caso, assim como em Ahmad (2015), a maldição do vencedor é resultado da ação tomada por um agente avesso à perda, visto que, no leilão em que todos pagam, todos os licitantes devem pagar seus respectivos lances.

Neste trabalho, avaliaremos, primeiramente, o efeito da aversão à perda na decisão ótima dos agentes, situados no leilão de segundo preço, em que há um preço de referência endógeno por meio de simples adaptações[1] no modelo de Ahmad (2015) e, posteriormente, aplicaremos o método analisado ao modelo de Odegaard e Anderson (2014).

3.1 Leilão de lance fechado de segundo preço

Existem $N+1 \geqslant 2$ licitantes idênticos que dão lances por um único item. Os valores internos, desses licitantes, são independentes e identicamente distribuídos de acordo com a função distribuição acumulada $F(v) = Pr\{V \leqslant v\}$, definida em $[\underline{v}, \bar{v}]$ e diferenciável em $(\underline{v}, \bar{v})$. Como conhece seu valor interno v, o licitante anuncia o lance b. Caso b seja o lance mais alto, o licitante vence o leilão e paga valor igual ao segundo lance mais alto; caso contrário, o licitante não paga valor algum e tampouco recebe o item leiloado, diferentemente do leilão em que todos pagam, analisado em Odegaard e Anderson (2014), em que o licitante, apesar de não receber o item leiloado, deveria arcar com o custo de seu lance. Assim como no modelo anterior, denotaremos por $V_{(1)}$ o valor estatisticamente mais alto dentre todos os demais licitantes.

[1] Buscando facilitar a análise e permitir a aplicação mais intuitiva ao modelo de Odegaard e Anderson (2014), foram alterados alguns aspectos do modelo de Ahmad (2015), como nomes de variáveis e definições básicas.

O autor diferencia os licitantes em dois tipos: ingênuos e sofisticados. O licitante ingênuo toma como referência o preço *ex ante* do item, análogo ao preço de varejo no modelo de Odegaard e Anderson (2014). De maneira oposta a isso, o licitante sofisticado incorpora seu valor interno ao ponto de referência, ao tornar este uma função de v. De maneira simplificada, a análise de Ahmad (2015) aborda apenas leilões nos quais existe, apenas, um dos dois tipos de licitante. Com o intuito de estudar os efeitos da aversão à perda no comportamento dos licitantes, apresentaremos nesta monografia apenas o equilíbrio de Nash relativo ao contexto com agentes ingênuos, pois é com eles que Ahmad (2015) realiza a modelagem da aversão à perda.

A utilidade do licitante que vence um leilão, nas condições propostas, é dada por $v - p + \eta(\alpha - p)$, em que p é o preço pago pelo item, α é o ponto de referência e η é a medida do grau de dependência ao ponto de referência. É possível interpretar essa utilidade esperada como a soma da utilidade de um agente neutro ao risco com a utilidade auferida por pagar mais ou menos que seu preço de referência (dada pelo termo $\eta(\alpha - p)$). Pressupõe-se que a utilidade relativa ao ponto de referência não pode dominar a utilidade padrão, de modo que $\eta \in [0, 1]$. A utilidade do licitante que perde o leilão é zero.

Os licitantes ingênuos, que nos interessam, tomam, como ponto de referência, o valor esperado para o equilíbrio do leilão, valor este pelo qual se prevê ser arrematado o leilão. Nesse caso, o ponto de referência é constante para qualquer $v \in [\underline{v}, \bar{v}]$, o que implica que os licitantes não assimilam o efeito de seu valor interno ao resultado esperado do leilão. O modelo de Ahmad (2015) prevê lances mais altos que o valor interno, o *overbidding*, e lances mais baixos que o valor interno, *underbidding*. Esse efeito acontece pela dependência do licitante ao preço de referência, denotado por η, que atua como fator ponderador no ato de determinar o lance. Dessa forma, se o preço de referência for mais alto (baixo) que o seu valor interno, ocorrerá o *overbidding* (*underbidding*).

A estratégia ótima do licitante sem a aversão à perda é definida por Rosenkranz e Schmitz (2007) para um ponto de referência exógeno, e foi a base do argumento de Ahmad (2015) para formular o equilíbrio de Nash com ponto de referência endógeno, sumarizado na seguinte proposição.

Proposição 3.1. *Quando os licitantes não são avessos à perda e têm um ponto de referência endógeno α, em um leilão de lance fechado de segundo preço, o único equilíbrio consistente com a estratégia fracamente dominante para o agente com valor interno v é dado por:*

$$b(v, \alpha) = \frac{v + \eta\alpha}{1 + \eta}$$

$$\alpha = E[v_{(2)}] = \int_{\underline{v}}^{\bar{v}} [1 - F_{(2)}(z)]dz,$$

em que $F_{(2)}(z)$ representa a distribuição do valor que determina o preço de equilíbrio do *item leiloado, no caso o segundo mais alto valor, denotado também por* $v_{(2)}$.[2]

Ahmad (2015) enuncia uma série de corolários com resultados no que concerne às propriedades do modelo apresentado, alguns dos quais são relevantes para o prosseguimento desse estudo. Primeiramente, mesmo com a existência de dependência de um preço de referência, os leilões de primeiro e segundo preço são equivalentes em receita. Além disso, nesse perfil de leilão, os lances são crescentes em relação ao número de licitantes, pois o valor esperado, para o resultado do leilão, (preço de referência) é crescente em $N+1$. Por fim, em leilões desse tipo, o número de licitantes que fazem *overbid* é superior ao número de licitantes que fazem *underbid*, o que fica evidente ao observar que existem mais licitantes com valor interno inferior ao preço de referência do que o oposto.

3.2 Leilão de lance fechado de segundo preço com agentes avessos à perda

A aversão à perda, em Ahmad (2015), é analisada apenas no caso dos licitantes ingênuos e será tratada da mesma forma nesta monografia. A utilidade para esses agentes será definida caso a caso. Um licitante que vence o leilão e que paga mais do que seu preço de referência α terá utilidade $v - p + \eta_l(\alpha - p)$. Se o licitante vence o leilão e paga menos que seu ponto de referência, sua utilidade é dada por $v - p + \eta_g(\alpha - p)$. A aversão à perda é caracterizada pela suposição de que $\eta_g \leqslant \eta_l, \eta_j \in [0, 1]$ para $j \in \{l, g\}$. Dessa forma, o autor determina a estratégia ótima na proposição que segue:

Proposição 3.2. *Em um leilão de lance fechado de segundo preço com licitantes ingênuos, avessos à perda e dependentes de um preço de referência endógeno* α*, o único equilíbrio consistente com a estratégia fracamente dominante para o agente com valor interno* v *é dado por:*

$$b(v,\alpha) = \begin{cases} \frac{v+\eta_g\alpha}{1+\eta_g} & se\ v > \alpha \\ \frac{v+\eta_l\alpha}{1+\eta_l} & caso\ contrário; \end{cases}$$

$$(1+\eta_g)\alpha = (1+\eta_g)\int_{\underline{v}}^{\bar{v}}[1 - G_{(2)}(z)]dz - \Delta\int_{\underline{v}}^{\alpha} F_{(2)}(z)dz.$$

No caso, $\Delta = \eta_l - \eta_g$ e $G_{(2)}(z)$ é a função distribuição acumulada do segundo mais alto valor, quando existem apenas N agentes (um a menos que $F(x)$).

Nessa proposição, é fundamental o papel de Δ para a determinação da existência de aversão à perda. Por um lado, quando $\Delta = 0$, a equação que determina o ponto de

[2] Vale ressaltar que a notação utilizada em $v_{(2)}$ difere de $V_{(1)}$ do modelo de Odegaard e Anderson (2014), pois neste é excluído da estatística o valor interno do licitante em análise, enquanto $v_{(2)}$ é a estatística entre todos os valores internos.

referência é igual à apresentada na Proposição 3.1, sem aversão. Por outro lado, quando $\Delta > 0$, o termo adicional de aversão à perda é negativo. Isso implica que a existência de aversão à perda abaixa o preço de referência para os licitantes. Como o preço de referência é igual à receita esperada *ex ante* do vendedor, Ahmad (2015) conclui que, nos leilões em que os licitantes são avessos à perda, a receita esperada é inferior à do caso sem aversão. Esse resultado é intuitivo, visto que, quando um agente é avesso à perda, sua utilidade será inversamente proporcional à distância entre o preço pago pelo bem e o preço que se havia como referência.

4 O preço de referência e a aversão à perda no leilão de centavos

4.1 Acréscimo do parâmetro de aversão à perda ao modelo

Com a finalidade de avaliar os efeitos do preço de referência e da aversão à perda no modelo de Odegaard e Anderson, faremos uso apenas de sua versão de segundo preço, na qual os licitantes perdedores podem resgatar seus lances perdidos como crédito na aquisição do item por um preço acima daquele praticado no varejo. A estratégia ótima é sumarizada na versão mais detalhada do Lema 2.4 que segue:

Lema. *2.4. Suponha que existam $N+1$ licitantes e dois canais de vendas: (1) varejo com preço fixo p_1 e (2) um leilão em que todos pagam de segundo preço no qual os licitantes perdedores podem usar seu lance como crédito na compra do item por p_2 (e $p_2 \geqslant p_1 + \int_0^{p_1} x\lambda_{V_{(1)}}(x)dx$). Caso um licitante com valor interno v aja de acordo com:*

1. *se $v \leqslant v^-$*
   a) *se $v \leqslant p_1$, dar o lance $b_v = \int_0^v x\lambda_{V_{(1)}}(x)dx$, e, se perder, não fazer nada,*
   b) *se $v \geqslant p_1$, dar o lance $b_v = b_{p_1} + \int_{p_1}^v p_1\lambda_{V_{(1)}}(x)dx$, e, se perder, comprar a p_1*
2. *se $v \geqslant v^-$, dar o lance $b_v = p_2$, e, se perder, comprar a p_2,*

em que $v^- \equiv F^{-1}(1 - \exp{(p_1 + b_{p_1} - p_2)/p_1} + \ln{(1-(F(p_1))^N)}^{1/N}$, então a estratégia resulta em um Equilíbrio de Nash.

A utilidade esperada de um agente com $v \leqslant p_1$, quando definida pela estratégia descrita no Lema 2.4, é dada por $\phi_v^O = \rho_v(v - E[V_{(1)} \mid V_{(1)} < v])$. Caso contrário, se $v > p_1$, $\phi_v^O = v - p_1 + \rho_{p_1}(p_1 - E[V_{(1)} \mid V_{(1)} < p_1])$. O sobrescrito O foi adicionado para diferenciar a utilidade em Odegaard e Anderson (2014) da de Ahmad (2015).

A utilidade definida por Odegaard e Anderson representa o valor esperado, ao ponderar a probabilidade de que o licitante em questão vença o leilão, o que difere do método de Ahmad (2015), pois este define separadamente a utilidade de um agente que vence e a utilidade de um agente que perde. Como, no caso de Ahmad, o agente que perde tem utilidade nula, a ausência da probabilidade de vitória é o que o torna diferente de Odegaaard e Anderson. Chamemos a utilidade no modelo de Ahmad de ϕ_v^A e lembremos que essa era dada por $\phi_v^A = v - p + \eta(\alpha - p)$.

A existência do preço de referência α no modelo de Ahmad tem interpretação análoga a p_1 no modelo de Odegaard e Anderson. Enquanto α representa o valor esperado para o resultado do leilão, p_1 é o valor pelo qual os agentes podem decidir comprar o item, no canal paralelo ao leilão, e, dependendo de seu v, alguns o fazem. Em ambos os casos, o preço de referência afeta a forma como os licitantes definem seus lances ótimos ao gerar um possível ganho (perda) para o agente que conseguir vencer o leilão pagando um valor inferior (superior) ao que esperava.

A utilidade dos licitantes em Ahmad (2015) é afetada pela dependência de referência para qualquer valor de v, o que indica a capacidade dos licitantes com valor interno inferior a α de auferir um ganho na utilidade ainda maior. Essa característica está ausente do modelo de Odegaard e Anderson (2014). No caso de p_1, como preço de referência, a utilidade dos agentes só é compensada com a dependência de referência ($\eta > 0$) caso $v > p_1$. Pode-se interpretar, desse enquadramento, que os licitantes que não validam o item, pelo menos ao preço de referência, não pagariam, sob racionalidade perfeita, valor superior à referência e, portanto, não se encontram mais satisfeitos por essa decisão. Para aqueles licitantes que possuem $v > p_1$, a utilidade é caracterizada, primeiramente, pelo fato de que todos eles adquirem o item, ao fim do procedimento, por uma das três possíveis formas, como é descrito na estratégia ótima. Notemos, dessa forma, que o trecho $v - p_1$, idêntico à utilidade de um consumidor que adquire o bem diretamente do varejo, na ausência do leilão, não está sob efeito da probabilidade de vitória no leilão. O outro termo, $\rho_{p_1}(p_1 - E[V_{(1)} \mid V_{(1)} < p_1])$, representa o ganho adicional relativo à probabilidade de sucesso no leilão.

Precisamente, apenas o termo v da utilidade em Odegaard e Anderson (2014) está livre de alterações *ex post*, quando analisado o caso dos licitantes com $v > p_1$. Isso ocorre, pois, dependendo do cenário encontrado, o preço pago pelo item pode superar p_1 e até alcançar p_2. Na média, os agentes são beneficiados pela existência do leilão em que todos pagam, visto que $\rho_{p_1}(p_1 - E[V_{(1)} \mid V_{(1)} < p_1]) > 0$ para quaisquer valores definidos de ρ_{p_1}, p_1 e $E[V_{(1)} \mid V_{(1)} < p_1]$.

Ainda no contexto em que $v > p_1$, é fácil identificar a similaridade não intencional entre os dois modelos no que concerne à dependência de referência. Assim como fizemos um paralelo entre α e p_1, notamos que uma comparação entre η e ρ_{p_1} é apropriada. A probabilidade de vitória no leilão, para um licitante com $v = p_1$, denotada por ρ_{p_1}, foi acrescida ao modelo como fator ponderador para o ganho proporcionado pelo leilão, mas, ainda que implicitamente, exerce impacto similar a η.

Analisemos, paralelamente, os trechos referentes à dependência de referência:

$$\eta(\alpha - p)$$
$$\rho_{p_1}(p_1 - E[V_{(1)} \mid V_{(1)} < p_1])$$

A estrutura das duas equações apresenta similaridades notáveis. Primeiramente, ambas trazem um fator ponderador pertencente ao intervalo $[0, 1]$, que multiplica a diferença entre o preço de referência e o preço efetivamente pago. Uma possível crítica a essa comparação seria no que concerne à característica paramétrica, arbitrária, de η oposta a ρ_{p_1}, que é uma função distribuição acumulada bem definida. Esse argumento é factível, uma vez que a dependência de referência, em Odegaard e Anderson (2014), é apenas implícita, e, em nenhum momento, existe intenção dos autores em ressaltar esse atributo. Apesar disso, é visível a semelhança entre os dois termos, e esta leva-nos a crer que a existência de um preço que sirva como referência para os agentes altera a estratégia ótima independente da intenção dos autores de criar um termo específico para mensurar essa relação.

As diferenças ressaltadas entre os termos nos dois modelos são explicadas pelos métodos adversos que os autores usaram. O ponto de partida de Ahmad (2015) foi a utilidade afetada pelo ponto de referência, assim como feito em seu artigo de inspiração, Rosenkranz e Schmitz (2007). Odegaard e Anderson (2014), em contrapartida, fizeram uso da estratégia ótima dos agentes para determinar um equilíbrio e, a partir daí, derivar a utilidade esperada para os agentes. É relevante que as duas linhas de raciocínio alcançaram resultados tão similares por intermédio de métodos opostos, o que contribui para a legitimação dos resultados obtidos por ambos os artigos.

Retomemos os postulados demonstrados por Ahmad (2015) que estabelecem as condições de equilíbrio para seu modelo na presença de aversão à perda. A introdução do conceito ao modelo de Odegaard e Anderson (2014) não é simples. Como foi verificado, ρ_{p_1} não é um parâmetro arbitrário, como η, de modo que a diferenciação feita de η para η_l e η_g não é aplicável diretamente a ρ_{p_1}. Dessa forma, não é possível criar duas variantes de ρ_{p_1} que satisfaçam as propriedades de aversão à perda e, simultaneamente, representar com fidelidade a probabilidade acumulada do licitante com $v = p_1$ vencer o leilão.

Introduzimos, nesse contexto, a variável μ que multiplicará um termo adicional, com o objetivo de modificar a utilidade do licitante, para caracterizar a aversão à perda. Para preservar as premissas iniciais do modelo, as alterações serão feitas, apenas, para os licitantes que possuem dependência de referência, aqueles com $v > p_1$. O termo adicional, a ser multiplicado por μ, é necessário, pois as características de dependência de referência, em Odegaard e Anderson (2014), são provenientes da estratégia ótima dos licitantes e não estão explícitas na derivação de suas utilidades. A utilidade representada a seguir é uma consequência direta da aplicação do teorema da equivalência de receitas, conforme Milgrom e Weber (2015), Krishna (2002) e Ahmad (2015). Assim sendo, para os licitantes com valor interno superior ao preço de referência p_1, sua utilidade será equivalente a

$$v - p_1 + \rho_{p_1}(p_1 - E[V_{(1)} \mid V_{(1)} < p_1]) + \mu(p_1 - \rho_v E[V_{(1)} \mid V_{(1)} < v] - (1 - \rho_v)(p_1 + \beta)),$$

em que β é o lance declarado pelo licitante.

Em nossa modelagem, a aversão à perda é caracterizada pela existência do modificador de utilidade apenas para os licitantes que teriam incentivos a dar lances mais altos que o preço de referência. A utilidade a ser maximizada, para a definição da estratégia ótima, equivale à apresentada acima[1], porém algebricamente representada de outra forma, para caracterizar com precisão o processo dado pelo leilão em que todos pagam de segundo preço.

Como Ahmad (2015) demonstra, a estratégia de equilíbrio, com aversão à perda, é similar à sem aversão, porém requer a análise. O resultado é sumarizado no seguinte lema:

Lema 4.1. *Suponha que existam $N+1$ licitantes avessos à perda e dois canais de vendas: (1) varejo com preço fixo p_1 e (2) um leilão em que todos pagam de segundo preço no qual os licitantes perdedores podem usar seu lance como crédito na compra do item por p_2 (e $p_2 \geqslant p_1 + \int_0^{p_1} x\lambda_{V_{(1)}}(x)dx$). Caso um licitante com valor interno v e grau de aversão à perda μ aja de acordo com:*

1. *se $v \leqslant p_1$, dar o lance $b_v = \int_0^v x\lambda_{V_{(1)}}(x)dx$, e, se perder, não fazer nada;*
2. *se $v > p_1$, dar o lance* $b_v = min\left\{ max\left\{ \frac{\left[b_{p_1} + \int_{p_1}^{v} p_1(1-\mu)\lambda_{V_{(1)}}(x)h(x)dx\right]}{h(x)}, b_{p_1}\right\}, p_2\right\}$*, e,*
    a) *se perder e $p_2 > p_1 + b_v$, comprar a p_1;*
    b) *se perder e $p_2 \leqslant p_1 + b_v$, comprar a p_2.*

em que $h(x) = e^{2\mu\int_{p_1}^{v}\lambda_{V_{(1)}}(x)dx}$, então a estratégia resulta em um Equilíbrio de Nash.

Demonstração. Da modificação da utilidade esperada, descrita em Odegaard e Anderson (2014), pelo termo de aversão à perda, temos que essa será:

$$\phi_v(\beta) = \int_{\underline{v}}^{p_1}(v-b_x)g(x)dx + \int_{p_1}^{b^{-1}(\beta)}(v-b_x)g(x)dx + (v-p_1-\beta)[1-G(b^{-1}(\beta))]$$
$$+\mu\left[p_1 - \left(\int_{\underline{v}}^{p_1} b_x g(x) + \int_{p_1}^{b^{-1}(\beta)} b_x g(x)dx + [1-G(b^{-1}(\beta))](p_1+\beta)\right)\right]$$

As notações b_v e $b(v)$ são intercambiáveis e representam a estratégia para um licitante com valor interno v, e $b^{-1}(\beta)$ é usado para representar a função inversa de um lance β. Temos também que $G(x) \equiv \rho_x = Pr\{V_{(1)} < x\} = (F_V(x))^N$ e $g(x) = dG(x)/dx$ denotam a função distribuição acumulada e a função distribuição de probabilidade de $V_{(1)}$, respectivamente. Para encontrar a estratégia ótima, para o licitante, é preciso maximizar

[1] De acordo com o princípio de equivalência de receita (RILEY; SAMUELSON, 1981; MYERSON, 1981; KRISHNA, 2002)

a equação da utilidade em relação a β. A derivação do modelo de Odegaard e Anderson (2014) é demonstrada em seu apêndice, portanto a tomaremos como dada e igual a:

$$p_1 g(b^{-1}(\beta))\frac{1}{db(b^{-1}(\beta))/db^{-1}(\beta)} - [1 - G(b^{-1}(\beta))]$$

O fragmento que representa a aversão à perda deve ser derivado e adicionado à equação acima, para que seja encontrada a condição de primeira ordem. Sua derivação é demonstrada em sequência.

$$\begin{aligned}
&\mu\left[-\left(b(b^{-1}(\beta))g(b^{-1}(\beta))\frac{(db^{-1}(\beta))}{d\beta} + [1 - G(b^{-1}(\beta))] + (p_1+\beta)g(b^{-1}(\beta))\frac{db^{-1}(\beta)}{d\beta}\right)\right]\\
=&\mu\left[-\left((p_1+2\beta)g(b^{-1}(\beta))\frac{1}{db(b^{-1}(\beta))/db^{-1}(\beta)} + [1 - G(b^{-1}(\beta))]\right)\right]
\end{aligned}$$

Em equilíbrio simétrico, $\beta = b(v)$, o que nos leva à condição de primeira ordem:

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi_v}{db(v)} &= p_1 g(v)\frac{1}{db(v)/dv} - [1 - G(v)] - \mu\left((p_1 + 2b(v))g(v)\frac{1}{db(v)/dv} + [1 - G(v)]\right) = 0\\
&= [p_1(1-\mu) - 2\mu b(v)]g(v)\frac{1}{db(v)/dv} - (1+\mu)(1 - G(v)) = 0
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
[p_1(1-\mu) - 2\mu b(v)]g(v)\frac{1}{db(v)/dv} &= (1+\mu)[1 - G(v)]\\
\frac{[p_1(1-\mu) - 2\mu b(v)]g(v)}{(1+\mu)[1 - G(v)]} &= \frac{db(v)}{dv}
\end{aligned}$$

Como sabemos, $g(v)/[1 - G(v)] = \lambda_{V_{(1)}}(v)$, que é a taxa de risco de $V_{(1)}$. Dessa forma, deparamo-nos com a Equação Diferencial Ordinária (EDO):

$$\lambda_{V_{(1)}}(v)p_1(1-\mu) - 2\mu\lambda_{V_{(1)}}(v)b(v) = \frac{db(v)}{dv}.$$

Por ser uma EDO da forma $y' = a(t)y + b(t)$, a partir de sua solução geral (SIMON; BLUME, 2004), teremos que

$$b(v) = \left[k + \int p_1(1-\mu)\lambda_{V_{(1)}}(x)e^{2\mu\int\lambda_{V_{(1)}}(t)dt}dx\right]e^{-2\mu\int\lambda_{V_{(1)}}(x)dx},$$

Sabemos que $b(v)$ só é definida em $(p_1, \bar{v}]$, pois é nesse intervalo que se dá a aversão à perda do licitante. Como é uma função contínua, podemos resolver o problema do valor inicial de maneira "automática", ao determinar os limites de integração como p_1 e v (EDWARDS; PENNY, 2002). Dessa forma, como existe a continuidade da função, em relação ao caso em que $v \leqslant p_1$, ao fazer o limite de $b(v)$ com x tendendo a p_1, descobrimos que $y_0 \equiv k = b_{p_1}$ (y_0 é o valor inicial). Assim sendo, temos que a estratégia ótima, para um licitante com valor interno $v > p_1$, é

$$b(v) = \frac{\left[b_{p_1} + \int_{p_1}^{v} p_1(1-\mu)\lambda_{V_{(1)}}(x)e^{2\mu\int_{p_1}^{v}\lambda_{V_{(1)}}(t)dt}dx\right]}{e^{2\mu\int_{p_1}^{v}\lambda_{V_{(1)}}(x)dx}}$$

■

Com a adição da aversão à perda, notamos que os licitantes com $v > p_1$ preferem reduzir seus lances, para não incorrerem de uma dedução muito grande, em sua utilidade, por pagarem um valor superior ao preço de referência. Podemos verificar, também, que para licitantes sem aversão à perda, $\mu = 0$, a estratégia ótima converge para aquela apresentada no Lema 2.4, o que argumenta em favor da consistência do Lema 4.1. Para licitantes com aversão à perda muito alta, a estratégia ótima, sob certas condições, poderia tornar-se no anúncio de um lance inferior a b_{p_1}, uma vez que o segundo termo do numerador seria zerado, e o denominador, na maior parte dos casos, seria superior a b_{p_1}. Esse comportamento, em contrapartida, seria adverso aos pressupostos da aversão à perda, visto que seria motivado pelo ganho de pagar um valor inferior ao preço de referência, ganho que tem a mesma intensidade da perda causada pelo *overbidding*. Nesse contexto, acrescentamos a condição de que o licitante dará o lance máximo entre a estratégia, acima derivada, e b_{p_1}. Dessa forma, se sua aversão à perda for muito alta, o agente se portará como alguém cujo valor interno é $v = p_1$.

4.2 Exemplificação numérica para valores internos distribuídos uniformemente

Com o objetivo de ilustrar, com mais clareza, as consequências da nova estratégia de equilíbrio, determinada na presença de aversão à perda, realizaremos simulações numéricas para quatro licitantes ($N = 3$), e com valores internos uniformemente distribuídos entre $[0, 1]$ (ou seja, $f(x) = 1$, $F(x) = x$, $G(x) = x^N$ e $g(x) = Nx^{N-1}$). Serão usados $p_1 = 0{,}5$ e $p_2 = 1$ para facilitar comparações com o exemplo numérico dado em Odegaard e Anderson (2014). Os lances ótimos, para diferentes valores internos e diferentes parâmetros de aversão à perda, podem ser visualizados nas tabelas 1 e 2. Sabemos, também, que $b_{p_1} \approx 0{,}051$ quando $N + 1 = 4$ e $b_{p_1} \approx 0{,}193$ quando $N + 1 = 2$.

Tabela 1 – **Lances ótimos quando há 4 agentes**

	Aversão à perda						
Lances	$\mu = 0{,}75$	$\mu = 0{,}5$	$\mu = 0{,}25$	$\mu = 0{,}15$	$\mu = 0{,}1$	$\mu = 0{,}05$	$\mu = 0$
$b(0{,}95)$	0,230	0,462	0,700	0,800	0,851	0,904	0,958
$b(0{,}85)$	0,117	0,227	0,341	0,387	0,411	0,435	0,460
$b(0{,}75)$	0,079	0,137	0,197	0,221	0,233	0,245	0,258
$b(0{,}65)$	0,062	0,089	0,116	0,127	0,133	0,139	0,144
$b(0{,}55)$	0,053	0,060	0,068	0,070	0,072	0,073	0,075

Fonte: elaborado pelo próprio autor

Nota: valores aproximados

Os lances anunciados em um leilão com quatro licitantes são inferiores àqueles anunciados no leilão com dois licitantes. Esse resultado sustenta-se para os crescentes

Tabela 2 – **Lances ótimos quando há 2 agentes**

	Aversão à perda						
Lances	$\mu = 0{,}75$	$\mu = 0{,}5$	$\mu = 0{,}25$	$\mu = 0{,}15$	$\mu = 0{,}1$	$\mu = 0{,}05$	$\mu = 0$
$b(0{,}95)$	0,294	0,595	0,925	1*	1*	1*	1*
$b(0{,}85)$	0,193*	0,359	0,557	0,646	0,694	0,743	0,795
$b(0{,}75)$	0,193*	0,270	0,397	0,451	0,480	0,509	0,540
$b(0{,}65)$	0,193*	0,224	0,295	0,325	0,340	0,356	0,371
$b(0{,}55)$	0,193*	0,200	0,223	0,232	0,237	0,241	0,246

Fonte: elaborado pelo autor

Nota: valores aproximados.

(*): pontos onde $b(v)$ foi restringida por um de seus limites, definidos no Lema 4.1.

valores de N e é consequência da decrescente probabilidade de vitória no leilão: quanto mais agentes estiverem disputando, maior será a probabilidade de que algum deles tenha um valor interno superior.

Para indivíduos com valor interno muito próximo do preço de referência, a aversão à perda pouco influencia seus lances, uma vez que eles seriam baixos, de qualquer modo; entretanto, para licitantes com valores internos elevados, a diferença entre os lances com baixa ou nenhuma aversão à perda e os lances com alta aversão é superior a 70% de seu valor, como se pode observar em ambas as tabelas, em $b(0{,}95)$.

De maneira geral, é esperado que os licitantes apresentem algum grau de aversão à perda, mas que este não seja elevado, já que esse resultado desviaria, de maneira irreal, das conclusões da microeconomia tradicional. Quando supomos, dessa maneira, que a distribuição de μ seja dada de maneira semelhante a uma função log-normal, com seus valores mais elevados encontrados no intervalo $[\frac{1}{10}, \frac{1}{4}]$, fica caracterizado o comportamento dominante de *underbidding* dos licitantes. O *overbidding* só será observado para valores internos demasiadamente elevados e apenas nos casos em que a aversão à perda for próxima de zero.

Os comportamentos do vendedor e do leiloeiro requerem destaque em nossa análise. Suponhamos, primeiramente, que uma única firma opere ambos os canais. Seria possível realizar a errada interpretação de que a firma tem incentivos a aumentar arbitrariamente seus preços, até que $p_1 = 1 < p_2$. Efetivamente, esse comportamento causaria aumento nos lances, de forma generalizada, ao forçar todos os licitantes a agirem de forma neutra à perda. Em contrapartida, reduziria o número de agentes perdedores do leilão que compram o bem, seja por p_1 seja por p_2, de maneira superior ao incremento nos lances. Isso acontece, pois os licitantes nunca aceitarão adquirir o item por p_1 caso $v < p_1$, independentemente do lance dado, e só aceitarão pagar p_2 caso $v + b_{p_1} > p_2$; entretanto, como $p_2 > p_1 = 1$, por mais próximo de 1 que p_2 esteja, não haverá mais que 37% dos licitantes dispostos a comprar o item pelo valor[2].

Os resultados de Odegaard e Anderson (2014) são mantidos, também, no contexto em que duas firmas competitivas administram o varejo e o leilão, desde que sejam mantidos seus pressupostos. Para maior verossimilhança, podemos supor um cenário em que o leiloeiro consegue adquirir seus produtos no atacado e, dessa forma, quando alguém vence o leilão, não é garantida a receita para o vendedor, visto que este não é mais o fornecedor do leiloeiro. Nesse contexto, na presença de agentes perfeitamente racionais, o leiloeiro teria o incentivo de fixar seu preço em $p_2 = b_{p_1} + p_1$, de modo que nenhum licitante comprasse o item do varejista, de acordo com o Corolário 2.2. Na nossa análise, na existência de agentes avessos ao risco, supostamente distribuídos de maneira log-normal, porém, ainda existiriam agentes dispostos a comprar o item no varejo. De toda forma, em um contexto como o descrito, é evidente que o leiloeiro possui força o suficiente para permanecer no mercado, sem auferir excedente negativo, como demonstrado em Odegaard e Anderson (2014).

[2] Note que, para $p_1 = 1$, $b(0{,}63) = 0{,}364$. Assim sendo, $v + b(v) = 0{,}63 + 0{,}364 = 0{,}994 \approx 1$.

Conclusão

Os leilões são uma das formas mais relevantes de comercialização de produtos desde os primórdios das civilizações, e continuam tendo função destacada no mundo globalizado e nos mercados altamente tecnológicos. Na análise microeconômica, os leilões têm especial relevância, no que concerne à teoria dos jogos, e não é de surpreender a quantidade disponível de literatura que aborda o tema. Dentre os mais modernos formatos de leilão, sobressai-se o leilão de centavos por sua mecânica única em ambientes *online*. Apesar disso, ainda existem temáticas pouco exploradas em teoria dos leilões, como a presença de canais alternativos de compra, que fornecem um preço de referência para os licitantes e que ativamente influenciam a forma como os lances são formulados. Desvios de racionalidade, apresentados à teoria econômica, há quase 40 anos, por Kahneman e Tversky (1979), também são menosprezados na pesquisa, com poucos estudos sobre o comportamento dos licitantes perante racionalidade limitada ou perante vieses comportamentais, como aversão ao risco e à perda.

Nesta monografia, analisamos o modelo de Odegaard e Anderson (2014), que apresenta o leilão de centavos como um leilão em que todos pagam de segundo preço, com um canal alternativo de vendas, sob a ótica da dependência de referência e da aversão à perda. A derivação do equilíbrio, para cada um dos casos apresentados por Odegaard e Anderson (2014), foi realizada por meio da expansão do argumento de Milgrom e Weber (2015) e, principalmente, Krishna e Morgan (1997). O modelo de Odegaard e Anderson (2014) mostra a mudança na estratégia ótima para os licitantes que se deparam com o canal paralelo de vendas, a loja de varejo. Os autores não reconhecem formalmente, mas a possibilidade de compra por esse canal alternativo causa um efeito na utilidade dos agentes muito similar à dependência de referência, analisada, por exemplo, em Rosenkranz e Schmitz (2007), Lange e Ratan (2010) e Ahmad (2015). Nesse aspecto, a utilidade do licitante, qualquer que seja seu valor interno, será ancorada pelo preço praticado no varejo a uma taxa equivalente à probabilidade de vitória no leilão, diferentemente dos demais artigos, que supõem arbitrário parâmetro de dependência de referência. Essa variação é explicada pela forma com que o preço de referência é assimilado a cada modelo. No caso de Ahmad (2015), o impacto da dependência de referência afeta diretamente a utilidade do licitante, para ser, então, expressa na estratégia ótima. Para Odegaard e Anderson (2014), em contrapartida, o preço de referência é um preço de fato praticado, e o licitante pode optar por adquirir o bem a esse preço, de forma que o lance anunciado é ponderado por essa referência. A utilidade derivada, por esse mecanismo, recebe, então, um adicional ao seu valor esperado.

Nossa introdução da aversão à perda ao modelo de Odegaard e Anderson (2014) foi realizada com o intuito de complementar o modelo, com um aspecto psicológico não captado pelo original. Como resultado, verificamos que os agentes avessos à perda têm a tendência ao *underbidding*. Esse resultado é condizente com a intuição causada pela noção de aversão à perda, uma vez que os agentes incorrem em uma perda extra ao pagar, pelo item, um valor superior ao esperado. Além disso, a estratégia proposta em nossa pesquisa é consistente com a modelagem original, pois, na ausência de aversão à perda, a estratégia ótima dos licitantes é a mesma de Odegaard e Anderson (2014).

Há, ainda, muito para se pesquisar e para se aprofundar na modelagem do leilão de centavos. Apesar de o nosso estudo abordar o modelo de Odegaard e Anderson (2014) de forma literal nas premissas e nos resultados, acreditamos que ainda há espaço para modificações mais profundas. A aproximação da mecânica do leilão de centavos para um leilão em que todos pagam de segundo preço é coerente, mas permite contestações, especialmente por sua característica de encerramento em que a cada novo lance é acrescida uma quantidade determinada de tempo. A literatura em teoria dos jogos já possui argumentos que podem ser usados para sustentar um resultado diferente em relação ao leilão de centavos, ainda que o atual enquadramento da *Attrition War* (KRISHNA; MORGAN, 1997) seja satisfatório. Outra questão, com potencial para novas pesquisas, é a forma como o leiloeiro adquire os itens, dada no modelo como a compra direta do canal alternativo. Odegaard e Anderson admitem que, atualmente, a maioria dos *sites* especializados nesse tipo de leilão adquire seus bens por atacado, o que mudaria as conclusões de seu artigo no que concerne ao excedente negativo, auferido pelo leiloeiro.

Por fim, no mundo atual, em que avanços tecnológicos acontecem em alta velocidade, é possível que os leilões de centavos, ou outros tipos de leilões em que todos pagam, reinventem-se, de tempos em tempos, e criem novas maneiras de se inserir no mercado. A evolução constante dos meios de comércio, no mundo, é origem de muitas justificativas para novas pesquisas e avanços no estado-das-artes da microeconomia. Esperamos que os resultados descritos, nesta monografia, possam ser úteis a pesquisadores e a usuários dos leilões em suas empreitadas.

Referências

AHMAD, H. F. Endogenous price expectations as reference point in auctions. *Journal of Economic Behavior and Organization*, v. 112, p. 46–63, 2015. Citado 10 vezes nas páginas 10, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33 e 38.

AMYX, D. A.; LUEHLFING, M. S. Winner's curse and parallel sales channels — online auctions linked within e-tail websites. *Information and Management*, v. 43, p. 919–927, 2006. Citado na página 26.

AUGENBLICK, N. The sunk-cost fallacy in penny auctions. *Review of Economic Studies*, 2015. No prelo. Citado na página 15.

BOS, O. Wars of attrition and all-pay auctions with stochastic competition. *European Journal of Operational Research*, v. 48, p. 83–91, 2012. Citado na página 14.

BYERS, J. W.; MITZENMACHER, M.; ZERVAS, G. Information asymmetries in pay-perbid auctions: How swoopo makes bank. *CoRR*, abs/1001.0592, 2010. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1001.0592>. Citado na página 18.

CASAS-ARCE, P. Dismissals and quits in repeated games. *Economic Theory*, v. 43, p. 67–80, 2010. Citado na página 16.

EDWARDS, C. H.; PENNY, D. E. In: _____. *Elementary Differential Equations*. 6. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 2002. p. 1–51. Citado na página 34.

JIANG, Z. Z. et al. Selecting optimal selling format of a product in b2c online auctions with boundedly rational customers. *European Journal of Operational Research*, v. 226, p. 139–153, 2013. Citado na página 12.

KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, v. 47, n. 2, p. 263–292, 1979. Citado na página 38.

KRISHNA, V. In: _____. *Auction Theory*. 2. ed. [S.l.]: Academic Press, 2002. p. 11–35. Citado 4 vezes nas páginas 18, 22, 32 e 33.

KRISHNA, V.; MORGAN, J. An analysis of the war of attrition and the all-pay auction. *Journal of Economic Theory*, v. 72, p. 343–362, 1997. Citado 5 vezes nas páginas 14, 15, 16, 38 e 39.

LANGE, A.; RATAN, A. Multi-dimensional reference-dependent preferences in sealed-bid auctions – how (most) laboratory experiments differ from the field. *Games and Economic Behavior*, v. 68, p. 634–645, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 38.

MILGROM, P. R.; WEBER, R. J. Distributional strategies for games with incomplete information. *Mathematics of Operations Research*, v. 10, n. 4, p. 619–632, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 16, 32 e 38.

MYERSON, R. B. Optimal auction design. *Mathematics of Operations Research*, v. 6, n. 1, p. 58–73, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 33.

ODEGAARD, F.; ANDERSON, C. K. All-pay auctions with pre- and post-bidding options. *European Journal of Operational Research*, v. 239, p. 579–592, 2014. Citado 24 vezes nas páginas 9, 10, 12, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38 e 39.

OSWALD, E. *Swoopo quietly files for bankruptcy*. 2011. Disponível em: <http://technologizer.com/2011/03/25/swoopo-quietly-files-for-bankruptcy/>. Citado na página 16.

PINKER, E.; SEIDMANN, A.; VAKRAT, Y. Using bid data for the management of sequential, multi-unit, online auctions with uniformly distributed bidder valuations. *European Journal of Operational Research*, v. 202, p. 574–583, 2010. Citado na página 12.

PLATT, B. C.; PRICE, J.; TAPPEN, H. The role of risk preferences in pay-to-bid auctions. *Management Science*, v. 59, n. 9, p. 2117–2134, 2013. Citado na página 15.

RILEY, J. G.; SAMUELSON, W. F. Optimal auctions. *The American Economic Review*, v. 71, n. 3, p. 381–392, 1981. Citado 4 vezes nas páginas 11, 12, 13 e 33.

ROSENKRANZ, S.; SCHMITZ, P. J. Dismissals and quits in repeated games. *The Economic Journal*, v. 117, p. 637–653, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 27, 32 e 38.

ROTH, A. E.; OCKENFELS, A. Optimal auctions. *The American Economic Review*, v. 92, n. 4, p. 1093–1103, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 14.

SIMON, C. P.; BLUME, L. Equações diferenciais ordinárias: Equações escalares. In: ______. *Matemática para economistas*. São Paulo: Bookman, 2004. cap. 24, p. 633–645. Citado na página 34.

SUN, D.; LI, E.; HAYYA, J. C. The optimal format to sell a product through the internet: Postedprice, auction, and buy-price auction. *International Journal of Production Economics*, v. 127, p. 147–157, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 12.

VARIAN, H. Leilões. In: ______. *Microeconomia: uma abordagem moderna*. 8. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012. cap. 17, p. 333–350. Citado 4 vezes nas páginas 11, 12, 13 e 14.

VICKREY, W. Endogenous price expectations as reference point in auctions. *The Journal of Finance*, v. 16, n. 1, p. 8–37, 1961. Citado 4 vezes nas páginas 9, 11, 12 e 13.